MODELISATION DES EFFORTS

Expression torsorielle des efforts

Chapitre 3

EXERCICES

Feuille n°4

CORRECTION

EXERCICE 1

On considère un solide $\{S\}$ de masse $m = 100\ kg$ de centre de gravité G placé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -10 \cdot \vec{z} \quad (m \cdot s^{-2})$.

a) Calculer en N l'intensité P du poids du solide $\{S\}$.

$P = m \times g = 100 \times 10 = 1000\ N$

b) Ecrire en G le torseur qui modélise le poids du solide $\{S\}$.

On donne $\vec{g} = -10 \cdot \vec{z} \quad (m \cdot s^{-2})$, c'est-à-dire que le champ de pesanteur est porté par l'axe $\vec{z}$ (on peut dire si on veut que la verticale est l'axe $\vec{z}$).

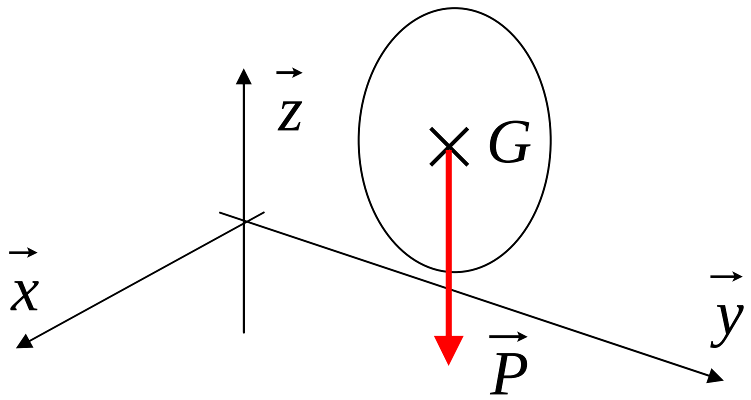
La résultante du torseur poids (« colonne » de gauche) vaut dont $\vec{P} = -1000 \cdot \vec{z} \quad (N)$.

De plus, un poids est modélisé à l'aide d'un glisseur lorsqu'il est écrit là où il est appliqué, c'est-à-dire au point G, centre de gravité du solide ; le moment (« colonne » de droite) est donc nul : $\overrightarrow{M_G} = \vec{0}$.

On a donc :

$$\{P\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1000 & 0 \end{Bmatrix}$$

c) Faire un schéma de la situation (repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, solide $\{S\}$, centre de gravité G et résultante $\vec{P}$).



EXERCICE 2

On considère un solide $\{S_2\}$ en acier de forme cylindrique, diamètre $d = 10\ cm$, hauteur $h = 50\ mm$, de centre de gravité G_2 et placé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = 10 \cdot \vec{x} \quad (m \cdot s^{-2})$.

a) Calculer en daN l'intensité P_2 du poids du solide $\{S_2\}$. (attention aux unités…)

$$\begin{aligned} P &= m \times g \\ &= \rho \times V \times g \\ &= \rho \times \frac{\pi \cdot d^2}{4} \times h \times g \\ &= 7800 \times \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} \times 0{,}05 \times 10 \\ P &= 30{,}63\ N \end{aligned}$$

b) Ecrire en G_2 le torseur qui modélise le poids du solide $\{S_2\}$.

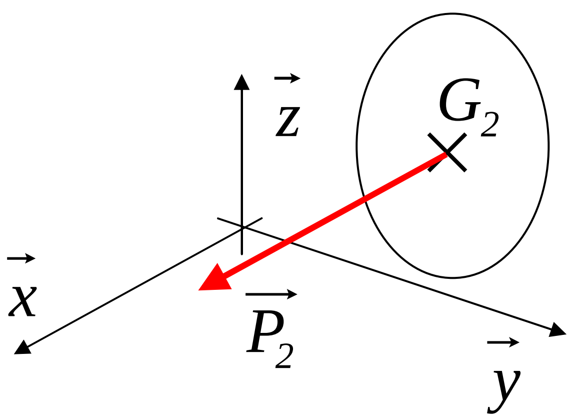
On donne $\vec{g} = 10 \cdot \vec{x} \quad (m \cdot s^{-2})$, c'est-à-dire que le champ de pesanteur est porté par l'axe $\vec{x}$.

La résultante du torseur poids (« colonne » de gauche) vaut alors $\vec{P_2} = 30{,}63 \cdot \vec{x} \quad (N)$.

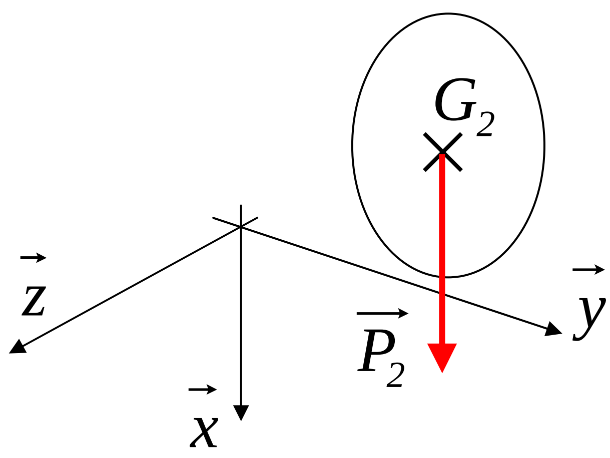
On a donc au point G_2 :

$$\{P_2\} = \underset{G_2}{\begin{Bmatrix} 30{,}63 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}$$

c) Faire un schéma de la situation (repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, solide $\{S_2\}$, centre de gravité G_2 et résultante $\vec{P_2}$).

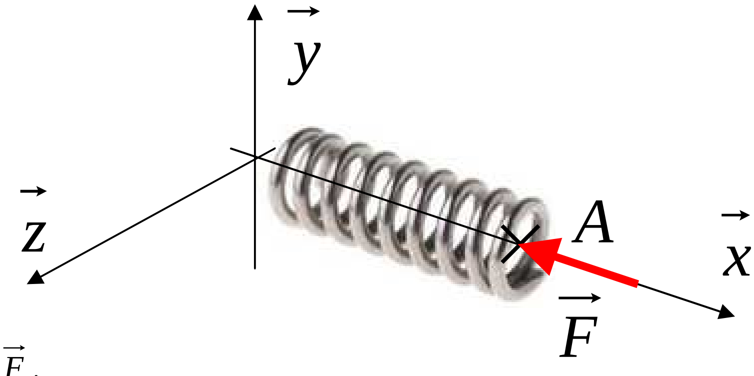


Le poids n'est pas « vertical » par rapport à la feuille ; ça fait bizarre mais c'est pourtant juste.



Si on tient à mettre le poids « vertical » par rapport à la feuille, il suffit de tourner le repère ou d'en prendre un autre…

EXERCICE 3



On considère le ressort de compression ci-contre de raideur $k = 3\ N \cdot mm^{-1}$ et de longueur à vide $L = 80\ mm$. On exerce sur ce ressort au point A une action mécanique modélisable par un glisseur, action mécanique qui comprime le ressort de $\Delta L = 10\ mm$.

a) Calculer en N l'intensité F de la force de compression $\vec{F}$.

$$F = k \times \Delta L = 3 \times 10 = 30\ N$$

b) Tracer en rouge sur la figure ci-contre (sans échelle particulière) la force de compression $\vec{F}$.

c) Ecrire la force $\vec{F}$ dans le repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

La force de compression est // à l'axe $\vec{x}$ (portée par lui) mais attention au sens !

=> un signe « – » est à considérer…

$\vec{F} = -30 \cdot \vec{x}$ (N) <= vecteur en écriture « ligne ».

$$\vec{F} \left| \begin{array}{l} -30 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad (N)$$

<= vecteur en écriture « colonne ».

d) Ecrire en A et dans le repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le torseur qui modélise l'action mécanique $\{F\}$.

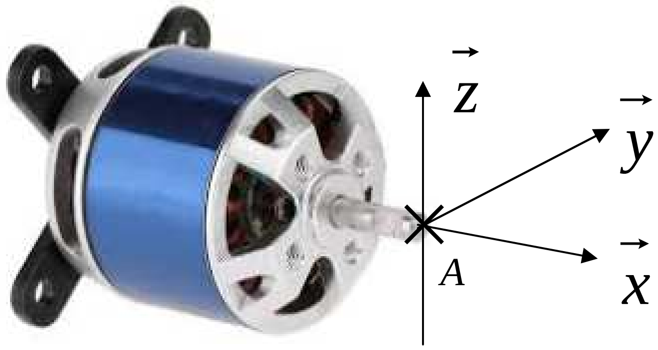
L'énoncé précise que l'action est modélisable par un glisseur ; or, par définition, un glisseur a un moment nul ; on a donc :

$$\{F\} = {}_A\begin{Bmatrix} -30 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

EXERCICE 4

On considère le moteur électrique ci-contre.

Compte-tenu de ses caractéristiques et de ses conditions d'alimentation, il tourne à la vitesse $N = 2400\ tr \cdot min^{-1}$ et il fournit un couple moteur $C_m = 4{,}5\ N \cdot m$.



a) Modéliser son couple moteur sous la forme d'un torseur d'effort $\{C_m\}$ exprimé en A.

Il faut ici considérer les points suivants :

Un moteur délivre un couple pur, ça ne « pousse » pas, ça ne « tire » pas, la résultante est nulle : $\overrightarrow{R_m} = \vec{0}$.

D'après la figure, l'axe du moteur (de son rotor) est l'axe $\vec{x}$; le couple moteur, tout comme la vitesse de rotation d'ailleurs, sont portés par cet axe $\vec{x}$; on a donc $\overrightarrow{C_m} = 4{,}5 \cdot \vec{x}$ ou, c'est pareil, $\overrightarrow{C_m} \left| \begin{matrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$

Sous forme torsorielle, on a donc : $\{F\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} 0 & 4{,}5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$

b) Calculer en $rad \cdot s^{-1}$ sa vitesse de rotation ω_{moteur}.

La grande classique à connaître absolument : $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot N}{60} = \dfrac{2 \cdot \pi \times 2400}{60} = 251{,}3\ rad \cdot s^{-1}$

c) Modéliser la vitesse du point A sous la forme d'un torseur cinématique $\{V_{A \in rotor / stator}\}$ exprimé en A.

Pour un torseur cinématique, la résultante correspond au vecteur vitesse de rotation d'un solide par rapport à un autre, ici le rotor par rapport au stator : $\overrightarrow{\Omega_{rotor / stator}} \left| \begin{matrix} 251{,}3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ (la rotation a lieu uniquement sur l'axe $\vec{x}$).

Concernant le moment, il faut ici considérer un point du rotor, le point A qui nous intéresse, en remarquant qu'il est sur l'axe de rotation, c'est-à-dire que sa vitesse de translation par rapport au rotor est nulle :

$\overrightarrow{V_{A \in rotor / stator}} = \vec{0}$ (si on prend un point du rotor ailleurs que sur l'axe de rotation, sa vitesse n'est plus nulle)

Au final, on a :

$$\{V_{A \in rotor / stator}\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} 251{,}3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$$

d) Calculer en W la puissance $P_{méca}$ qu'il développe (faire un comoment de torseurs).

$$
\begin{aligned}
P= & \;_A\begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix} \otimes \;_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega(rotor/stator)} \\ \overrightarrow{V(A\in rotor/stator)} \end{Bmatrix}_{\Re} \\
& = \vec{F}\cdot\overrightarrow{V(A\in rotor/stator)} + \overrightarrow{M_C}\cdot\overrightarrow{\Omega(rotor/stator)} \\
& = \vec{F}\cdot\vec{0} + \overrightarrow{M_C}\cdot\overrightarrow{\Omega(rotor/stator)} \\
& = \overrightarrow{M_C}\cdot\overrightarrow{\Omega(rotor/stator)} \\
& = \begin{vmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 251{,}3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\
& = (4{,}5\times 251{,}3)+(0\times 0)+(0\times 0) \\
P & = 1131\,W
\end{aligned}
$$

EXERCICE 5

On considère un vérin de référence « 3055 » alimenté sous une pression $p = 180\ bar$.

a) Il s'agit d'un vérin :

☑ hydraulique ☐ pneumatique

car **en pneumatique la pression n'excède pas 10 bar.**

b) Diamètre de tige : $\phi A = 30\ mm$

c) Diamètre de chambre : $\phi B = 50\ mm$

On considère que le vérin travaille « en tirant ».

d) La tige : ☑ rentre ☐ sort.

e) Orifice à l'admission : ☐ O_1 ☑ O_2

f) Orifice à l'échappement : ☑ O_1 ☐ O_2

g) Identifier les orifices sur le plan du vérin.

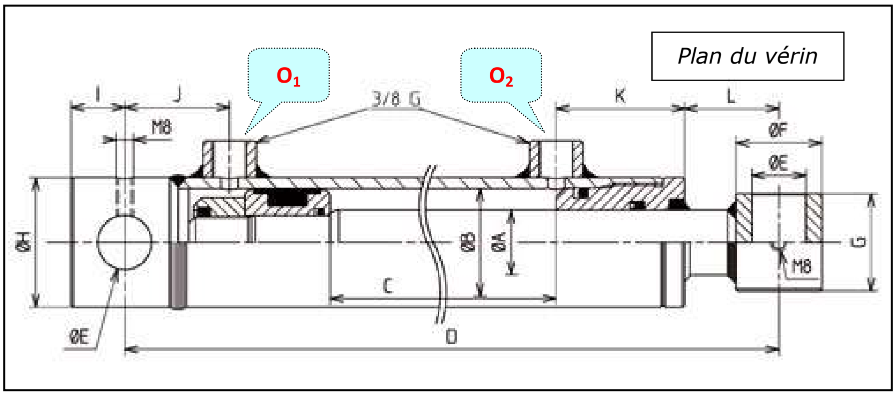
h) Colorier sur le plan du vérin et la vue de détail la chambre qui est sous pression.

i) D'après le constructeur, la force réelle développée vaut $F =$ **2T262**

j) Convertir en N l'intensité F.

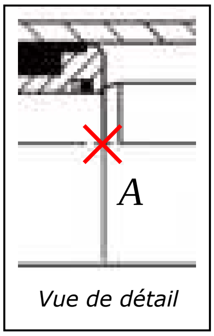
Il est vrai qu'il n'est pas correcte d'exprimer une force en tonnes ; cela dit, bien souvent et on le voit ici, les constructeurs prennent quelques libertés par rapport à cela.

<table>
<tr><th rowspan="2">Référence
Referenz
Reference</th><th colspan="2">Type
Typ
Type</th><th>Force de poussée
Druck Kraft
Pushing Pressure</th><th>Force de traction
Zug Kraft
Pulling Pressure</th><th rowspan="2">Course C
Hub C
Stroke C</th><th colspan="9">Encombrement
Mass
Dimension</th></tr>
<tr><th>ØA</th><th>ØB</th><th colspan="2">180 BARS</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th><th>I</th><th>J</th><th>K</th><th>L</th></tr>
<tr><td>2541</td><td rowspan="5">25</td><td rowspan="5">40</td><td rowspan="5">2T262</td><td rowspan="5">1T378</td><td>100</td><td>290</td><td rowspan="5">17.00</td><td rowspan="5">40</td><td rowspan="5">40</td><td rowspan="5">50</td><td rowspan="5">20</td><td rowspan="5">44</td><td rowspan="5">60</td><td rowspan="5">44</td></tr>
<tr><td>2542</td><td>200</td><td>390</td></tr>
<tr><td>2543</td><td>300</td><td>490</td></tr>
<tr><td>2544</td><td>400</td><td>590</td></tr>
<tr><td>2545</td><td>500</td><td>690</td></tr>
<tr><td>3052</td><td rowspan="6">30</td><td rowspan="6">50</td><td rowspan="6">3T354</td><td rowspan="6">2T262</td><td>200</td><td>400</td><td rowspan="6">25,25</td><td rowspan="6">40</td><td rowspan="6">45</td><td rowspan="6">60</td><td rowspan="6">25</td><td rowspan="6">49</td><td rowspan="6">60</td><td rowspan="6">44</td></tr>
<tr><td>3053</td><td>300</td><td>500</td></tr>
<tr><td>3054</td><td>400</td><td>600</td></tr>
<tr><td>3055</td><td>500</td><td>700</td></tr>
<tr><td>3056</td><td>600</td><td>800</td></tr>
<tr><td>3057</td><td>700</td><td>900</td></tr>
<tr><td>3562</td><td rowspan="6">35</td><td rowspan="6">60</td><td rowspan="6">5T089</td><td rowspan="6">3T357</td><td>200</td><td>400</td><td rowspan="6">25.25</td><td rowspan="6">40</td><td rowspan="6">45</td><td rowspan="6">70</td><td rowspan="6">25</td><td rowspan="6">49</td><td rowspan="6">60</td><td rowspan="6">44</td></tr>
<tr><td>3563</td><td>300</td><td>500</td></tr>
<tr><td>3564</td><td>400</td><td>600</td></tr>
<tr><td>3565</td><td>500</td><td>700</td></tr>
<tr><td>3566</td><td>600</td><td>800</td></tr>
<tr><td>3567</td><td>700</td><td>900</td></tr>
</table>



« Passons » donc la force en unité correcte : 1T = 1000 kg => F = 2262 kg et « on fait x 10 » => <u>F = 22620 N</u>

k) Positionner sur la vue de détail le point A, point d'application de la force $\overrightarrow{F_{fluide \rightarrow tige}}$ du fluide sur la tige.



Vue de détail

La géométrie du vérin présente une symétrie cylindrique et le champ de pression aussi.

=> le point A est sur l'axe du vérin.

De plus, la pression s'exerce sur la face « de droite » du piston de la tige (sur la vue de détail)

=> le point A appartient à la face sur laquelle s'applique la pression.

l) Modéliser l'effort du fluide sur la tige à l'aide d'un torseur glisseur $\{F_{fluide \rightarrow tige}\}$.

L'axe du vérin est l'axe $\vec{z}$; comme le vérin rentre (travaille en tirant), la force est orientée négativement sur l'axe $\vec{z}$; la résultante du torseur est donc $\overrightarrow{F_{fluide \rightarrow tige}} = -22620 \cdot \vec{z}$

Concernant le moment, il est nul puisqu'on nous dit que l'effort est modélisé à l'aide d'un torseur glisseur.

Donc :

$$\{F_{fluide \rightarrow tige}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -22620 & 0 \end{Bmatrix}$$

On considère que la tige se déplace par rapport au corps à la vitesse $V_{A \in tige/corps} = 40\ mm \cdot s^{-1}$.

m) Ecrire la vitesse $\overrightarrow{V_{A \in tige/corps}}$ dans le repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

La tige rentre, le vecteur vitesse est donc orienté <u>négativement</u> sur l'axe $\vec{z}$:

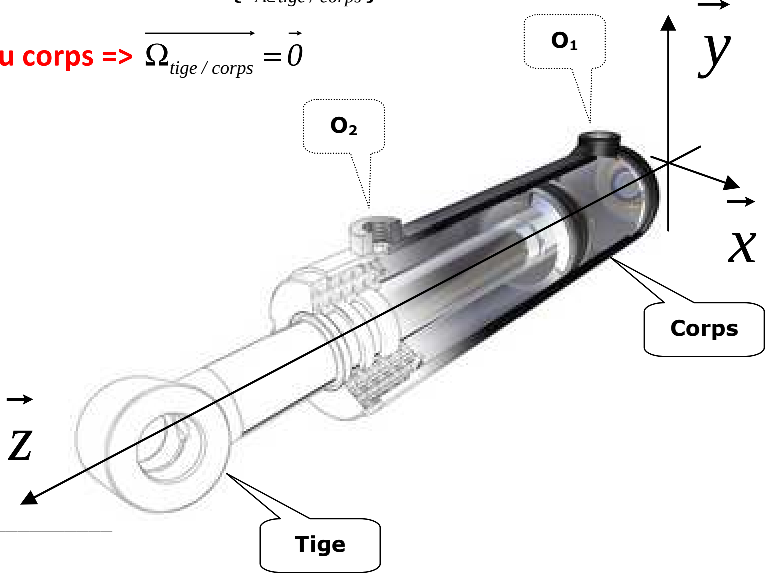
$$\overrightarrow{V_{A \in tige/corps}} = -40 \cdot \vec{z} \quad (mm \cdot s^{-1})$$

n) Modéliser la vitesse du point A sous la forme d'un torseur cinématique $\{V_{A \in tige/corps}\}$ exprimé en A.

La tige rentre, <u>elle ne tourne PAS</u> par rapport au corps => $\overrightarrow{\Omega_{tige/corps}} = \vec{0}$

On a donc :

$$\{V_{A \in tige/corps}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -40 \end{Bmatrix}$$



o) Calculer en W la puissance $P_{méca}$ qu'il développe.

(faire un *comoment* de torseurs).

$$
\begin{aligned}
P &= {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_{fluide \rightarrow tige}} \\ \overrightarrow{M_A}\end{matrix}\right\} \otimes {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega(tige/corps)} \\ \overrightarrow{V(A \in tige/corps)}\end{matrix}\right\}_{\Re} \\
&= {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_{fluide \rightarrow tige}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\} \otimes {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ \overrightarrow{V(A \in tige/corps)}\end{matrix}\right\}_{\Re} \\
&= \vec{F} \cdot \overrightarrow{V(A \in rotor/stator)} \\
&= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -22620 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}04 \end{vmatrix} \\
&= (0 \times 0) + (0 \times 0) + [(-22620) \times (-0{,}04)]
\end{aligned}
$$

$$P = 904{,}8\,W$$

<u>Attention aux unités !!!</u>

La force étant en Newton, on a convertit la vitesse en unité légale (m/s), ceci pour avoir des Watt (W) ; si on ne fait pas ça, on n'a pas des Watt…